1.7 无穷小的比较

1.7.1 无穷小比较的定义

1.7.2 重要的等价无穷小关系

1.7.2 等价无穷小替代定理

1.7　无穷小的比较

当$x \to 0$时，$3x, x^2, \sin x$都是无穷小，

而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x} = 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x^2} = \infty$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x} = \dfrac{1}{3}$，

两个无穷小的商可以出现不同的情况，说明不同的无穷小趋于0的速度有快慢，这是一个值得讨论的问题。

1.7.1 无穷小比较的定义

定义1.7.1 设 $\lim\alpha(x)=0$, $\lim\beta(x)=0$且$\alpha(x)$恒不为0

(1) 若$\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$,则称$\beta(x)$是比$\alpha(x)$高阶的无穷小,

记作$\beta(x)=o(\alpha(x))$;

(2) 若$\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$,则称$\beta(x)$是比$\alpha(x)$低阶的无穷小;

(3) 若$\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=C\neq 0$,则称$\beta(x)$与$\alpha(x)$是同阶无穷小,

记作 $\beta(x)=O(\alpha(x))$;

(4) 若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha^k(x)} = C \neq 0$, 则称 $\beta(x)$ 是关于 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小;

(5) 若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$, 则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小,

记作 $\beta(x) \sim \alpha(x)$.

注 $x \to 0$时, 称 x 为一阶无穷小,

x^k为x的k阶无穷小 $(k > 0)$,

例如 x^2为x的二阶无穷小, $x^{\frac{1}{2}}$ 为 x 的 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷小。

$\sim$ 是等价关系：反身性，对称性，传递性

反身性：$\alpha \sim \alpha$

对称性：$\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$

传递性：$\alpha \sim \beta$，$\beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

例1 $\because \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$，$\therefore \tan x$为$x$的一阶无穷小，

且 $\tan x \sim x$

$$\because \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2},$$

$\therefore 1-\cos x$ 为 x 的二阶无穷小，且 $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$.

1.7.2 重要的等价无穷小关系

可以证明，当 $x \to 0$时，成立下列等价无穷小关系：

(1) $\sin x \sim x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$

(2) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$　　(3) $e^x - 1 \sim x \sim \ln(1+x)$

(4) $(x+1)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}x$　　$(x+1)^{\mu} - 1 \sim \mu x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$$　令$t=(x+1)^{\frac{1}{n}}$，则$x=t^n-1$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^n-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(t^{n-1}+\cdots t+1)}=\frac{1}{n}$$

推广：若在某种极限过程中，函数 $\varphi(x)$ 是无穷小，则将上面各式中的变量 x 换成函数 $\varphi(x)$，相应的等价关系仍然成立。例如

当 $x \to 0$ 时，x^2 是无穷小，等价式

$$\sin x^2 \sim x^2 \qquad \sqrt[3]{x^2+1}-1 \sim \frac{1}{3}x^2 \text{成立.}$$

$$\text{若}\ \varphi(x) \to 0,\ \text{则} \left(\varphi(x)+1\right)^{\frac{1}{n}}-1 \sim \frac{1}{n}\varphi(x)$$

例2 当$x \to 0$时，$\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}$是x的几阶无穷小？

解：设其为 x 的 k 阶无穷小，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}{x^k}=C\neq 0$$

因

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^{3k}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}-3k}(1+x^{\frac{3}{2}})}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}-3k}}$$

故 $k=\dfrac{1}{6}$

1.7.3　等价无穷小替代定理

定理1.7.1 设α,β为无穷小,则$\beta=\alpha+o(\alpha)$当且仅当$\beta\sim\alpha$。　$\Rightarrow \alpha+o(\alpha)\sim\alpha$

证　$\beta=\alpha+o(\alpha)\Leftrightarrow\beta-\alpha=o(\alpha)\Leftrightarrow$

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=0\Leftrightarrow\lim\frac{\beta}{\alpha}=1\Leftrightarrow\beta\sim\alpha$$

定义:设$\lim\alpha(x)=0,\ \lim\beta(x)=0,$

若$\lim\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha}=0,$　即$\beta-\alpha=o(\alpha)$或$\beta=\alpha+o(\alpha),$

则称α是β的主部.

无穷小的主部

注：若α是β的主部，则$\alpha \sim \beta$

$$\Rightarrow \beta = \alpha + o(\alpha) \sim \alpha$$

例 $n \to \infty, \beta = \dfrac{n+1}{n^2} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$的主部为$\dfrac{1}{n}$.

$x \to 0$, $2x$是$2x - x^2$的主部.

例2 当$x \to 0$时，$\sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x}}$是x的几阶无穷小？

$$\sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})} \sim \sqrt[3]{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{6}}.$$

定理 1.7.2(等价无穷小替换定理) 设α、α'、β、β'皆为某种极限过程的无穷小，且$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，若$\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在，则$\lim \dfrac{\alpha}{\beta}$也存在，且$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

证 $$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim\left(\frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\beta}\right) = \lim \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\beta}$$

$$= \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

例3 $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5} \quad \left(\because \begin{matrix} \tan 3x \sim 3x \\ \sin 5x \sim 5x \end{matrix}\right)$$

推论 设$\alpha \sim \alpha'$,若$\lim[\alpha' \cdot f(x)]$存在,

则 $$\lim[\alpha f(x)] = \lim[\alpha' f(x)]$$

证: $$\lim[\alpha \cdot f(x)] = \lim\left[\frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \alpha' f(x)\right]$$

$$= \lim \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim[\alpha' f(x)] = \lim[\alpha' f(x)]$$

推论 设$\alpha \sim \alpha'$,若$\lim\left[\frac{\alpha'}{f(x)}\right]$存在, 则 $\lim\left[\frac{\alpha}{f(x)}\right] = \lim\left[\frac{\alpha'}{f(x)}\right]$

推论 设$\alpha \sim \alpha'$,若$\lim\frac{f(x)}{\alpha'}$存在,

则 $$\lim\left[\frac{f(x)}{\alpha}\right] = \lim\left[\frac{f(x)}{\alpha'}\right]$$

例4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\dfrac{1}{2}\sin 2x}{\tan^3 x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\dfrac{1}{2}\cdot 2x}{x^3}=0$ 错!

正解： 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

$(\because \tan^3 x\sim x^3,\quad \sin x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2\quad)$

注 等价无穷小替换，只用于乘、除因子，不要用于加、减中！

补充：　　等价无穷小在加减中可用的情形：

加、减关系在一定条件下可以换：

设α、α'、β、β'皆为某种极限过程的无穷小，

(1) 若$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = A \neq 1$，

则$\alpha - \beta \sim \alpha' - \beta'$；

(2) 若$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = A \neq -1$，

则$\alpha + \beta \sim \alpha' + \beta'$.

例5 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$

原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$

注 有时可先适当变形，再用等价无穷小替代.

为什么等价无穷小不能用于加、减中？

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\neq\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}\quad=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}\quad=0$$

$$\lim_{x\to 0}x^2\cdot\frac{x}{\tan x}=0$$

$$\lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)$$

要求$\lim f(x)$和$\lim g(x)$存在

（不包括∞情形）

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^3}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\quad=0$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x}$$